Universidad Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

ANOMALÍAS EN MECÁNICA CUÁNTICA

Autor

Miguel Ángel García Ferrando

Directores

Fernando Falceto Blecua
José V. García Esteve

Facultad de Ciencias
Departamento de Física Teórica

Año 2020

Índice

1. Introducción

Usualmente, la descripción cuántica de un sistema físico pasa por la correcta definición de un espacio sobre el que trabajar, espacio de Hilbert, así como la definición de operadores hermíticos a los que asociar los observables físicos. Este último punto tiene especial relevancia cuando tratamos la evolución de la función de onda que describe al sistema. Recordemos que la evolución viene dada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

Es decir, resolviendo dicha ecuación podemos obtener el valor de la función a tiempo t_2 si conocemos su estado a un tiempo t_1 anterior. Además, si H es autoadjunto siempre podremos encontrar un operador unitario $U(t)$ tal que $|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(t = 0)\rangle$. Destacar que el recíproco es también cierto, siendo ambos resultados nada triviales de probar (véase Teorema VIII.4 [1]). Esto evidencia la necesidad de encontrar hamiltonianos autoadjuntos con el fin de asegurar una evolución unitaria del sistema. Como veremos a lo largo del trabajo, las condiciones de contorno jugarán un papel muy relevante pues determinarán si un operador es o no autoadjunto.

Este hecho no debería sorprendernos dada la importancia que tienen las condiciones de contorno en el estudio de multitud de fenómenos físicos. Un claro ejemplo lo encontramos al estudiar la formación de ondas estacionarias en una cuerda o tubo. En ellos, el valor en los extremos determina el comportamiento del sistema. En concreto, juegan un papel relevante en la situación de nodos y vientres. En electromagnetismo, la solución a la ecuación de Poisson o Laplace está íntimamente relacionada con las condiciones de contorno. De hecho, para que la solución en el interior de un recinto sea única es imprescindible conocer el valor del potencial en el contorno. Por último, mencionar también la importancia de las condiciones de contorno en el estudio de sistemas termodinámicos. Las restricciones en este caso vendrán impuestas por las paredes que encierren y/o dividan el sistema. Estas pueden ser adiabáticas o diatérmanas, rígidas o móviles y permeables o impermeables. En función de las propiedades de estas paredes, el sistema evolucionará de forma distinta en lo que al flujo de calor, partículas y variación de volumen se refiere, obteniéndose, por lo tanto, estados de equilibrio diferentes.

En mecánica cuántica las condiciones de contorno siguen siendo relevantes, incluso más si cabe. Veámoslo explícitamente. Consideremos el hamiltoniano dado por $H = -i\partial_x$ definido sobre tres dominios diferentes:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\psi \in AC([0,1])^* \,|\psi(1) = \gamma\psi(0)\} \text{ siendo } |\gamma| = 1,\, \gamma \in \mathbb{C} \\ D_2 &= \{\psi \in AC([0,1]) \,|\psi(1) = r\psi(0)\} \text{ con } r \in \mathbb{R} \\ D_3 &= \{\psi \in AC([0,1]) \,|\psi(0) = 0\} \end{aligned}$$

Tomando $\hbar = 1$, la solución a la ecuación de Schrödinger vendrá dada por $\psi(x,t) = \psi(x-t)$ (resolución explícita en el anexo). No obstante, debido a las condiciones de contorno, la evolución será diferente para cada uno de los dominios. Para el dominio D_1 tenemos evolución unitaria pues la norma se conserva:

$$\psi(x,t) = \gamma\, \psi(x, t+1) \qquad \forall\, x \in [0,1]$$

Y por lo tanto

$$\langle \psi(x,t) | \psi(x,t) \rangle = |\gamma|^2 \, \langle \psi(x,t+1) | \psi(x,t+1) \rangle = \langle \psi(x,t+1) | \psi(x,t+1) \rangle$$

Para el dominio D_2 es válido el análisis anterior sustituyendo γ por r, es decir:

$$\langle \psi(x,t) | \psi(x,t) \rangle = r^2 \, \langle \psi(x,t+1) | \psi(x,t+1) \rangle \neq \langle \psi(x,t+1) | \psi(x,t+1) \rangle$$

De modo que si $r \neq \pm 1$, la norma no se conserva y la evolución no es unitaria.

Terminando con el ejemplo, para el dominio D_3 nos encontramos que existe evolución siempre y cuando $t > 0$. Además, para $t > 1$ las condiciones de contorno se traducen en que $\psi(x,t) = 0$. Adicionalmente, cabe destacar que hay una diferencia notable en la evolución con respecto a los dominios anteriores (D_1 y D_2). Esta es que para el dominio D_3 solo es posible ir hacia adelante en la evolución temporal, pues al hacerse cero las funciones de onda no es posible recuperar el estado a un tiempo anterior.

Como acabamos de ver, al cambiar de condiciones de contorno podemos perder la evolución unitaria haciendo que la probabilidad deje de conservarse o incluso que el estado desaparezca completamente (evolución para el dominio D_3). Por lo tanto, para obtener una evolución admisible, unitaria, tendremos que asegurarnos de que elegimos las condiciones de contorno apropiadas.

Comentar por último que las condiciones de contorno pueden influir en las simetrías del sistema. Esto se debe a que para que el sistema quede invariante bajo ciertas transformaciones es imprescindible que dichas transformaciones conmuten con el hamiltoniano y

---

*Mencionar que este conjunto de funciones viene definido por $AC(I) = \left\{ f \in L^2(I) \mid \partial_x f \in L^2(I) \right\}$. En el anexo se recoge una definición formal.

además dejen invariante su dominio. Si esto no ocurre, aparecen términos anómalos que rompen la simetría (véase [2]). También aparecen términos anómalos en ciertas ecuaciones de conservación como la ecuación de Heisenberg, teorema del Virial o el teorema de Hellmann-Feynman. Esto motiva la obtención de una generalización de las mismas para poder incluir dichos términos extra ([3] y [4]). Estos términos adicionales dependerán de los valores en el borde del dominio de definición del hamiltoniano, de ahí la especial relevancia de las condiciones de contorno.

En la primera parte del trabajo se introducirán algunos conceptos imprescindibles para poder construrir un procedimiento de obtención de extensiones autoadjuntas. Tras esto, se introducirán los conceptos de espacio de condiciones de contorno y anomalía. En este punto, ya seremos capaces de obtener extensiones autoadjuntas de cualquier operador, tanto en el espacio de funciones de cuadrado integrable como en el de sucesiones de cuadrado sumable. Por último, se recogerá paso a paso en que consiste el procedimiento mencionado anteriormente.

2. Objetivos

El objetivo del trabajo será mostrar un procedimiento eficiente de obtención de hamiltonianos autoadjuntos lo que se conseguirá extendiendo su dominio de definición. Comentar que nuestro punto de partida será siempre un operador (hamiltoniano) simétrico y cerrado.

3. Desarrollo. Extensiones autoadjuntas

Como se ha comentado, será necesario introducir una serie de conceptos previos que nos servirán para sustentar el desarrollo posterior. Dichos conceptos se recogen a continuación.

3.1. Nociones básicas

Empezaremos definiendo el concepto de *extensión* de un operador. Tras lo cual seguirán una serie de definiciones y proposiciones, con el fin de llegar satisfactoriamente a la definición de operador autoadjunto.

Definición 3.1 Dados dos operadores R y T, con dominios $D(R)$ y $D(T)$ respectivamente, diremos que T es una *extensión* de R si y solo si $D(R) \subset D(T)$ cumpliéndose:

$$T|_{D(R)} = R$$

Es decir, que al actuar T sobre $D(R)$ coincida con R. Cuando T sea una *extensión* de R lo denotaremos como $R \subset T$.

Definición 3.2 Sea R un operador definido en un dominio $D(R) \subset \mathcal{H}$. Entonces diremos que $y \in D(R^\dagger)$ si existe un $z \in \mathcal{H}$ tal que $\forall x \in D(R)$ se tiene:

$$\langle y|Rx\rangle = \langle z|x\rangle$$

Siendo $z = R^\dagger y$. Denominaremos a $R^\dagger$ *operador adjunto* de R. Además, para que $R^\dagger$ esté bien definido será necesario que $D(R)$ sea denso en $\mathcal{H}$.
Conviene recordar en este punto que el operador $R^{\dagger\dagger}$ existirá si y solo si el operador R es cerrable. Además, en ese caso $\overline{R} = R^{\dagger\dagger}$ y $(\overline{R})^\dagger = R^\dagger$. Este resultado será de utilidad cuando trabajemos con la anomalía, como se verá a lo largo del desarrollo.

Tras estas definiciones introduciremos una proposición que será de vital importancia más adelante.

Proposición 3.1 Sean R_1 y R_2 dos operadores, con dominios $D(R_1)$ y $D(R_2)$ respectivamente. Entonces si $R_1 \subset R_2$, se cumplirá que $R_2^\dagger \subset R_1^\dagger$.

Demostración. Veamos primero que $R_1 \subset R_2 \;\Rightarrow\; D(R_2^\dagger) \subset D(R_1^\dagger)$. Por definición tendremos:

$$\chi \in D(R_2^\dagger) \;\Rightarrow\; \langle\chi|R_2\cdot\rangle \text{ acotado en } D(R_2)$$

Ahora como $D(R_1) \subset D(R_2)$, podemos restringir el dominio de forma que:

$$\chi \in D(R_2^\dagger) \;\Rightarrow\; \langle\chi|R_2\cdot\rangle \text{ acotado en } D(R_1)$$

Por último, como $R_2|_{D(R_1)} = R_1$ tenemos:

$$\chi \in D(R_2^\dagger) \;\Rightarrow\; \langle\chi|R_1\cdot\rangle \text{ acotado en } D(R_1) \;\Rightarrow\; \chi \in D(R_1^\dagger)$$

Es decir, que $D(R_2^\dagger) \subset D(R_1^\dagger)$.

Nos queda probar que $R_1 \subset R_2 \;\Rightarrow\; R_1^\dagger|_{D(R_2^\dagger)} = R_2^\dagger$. Por lo que acabamos de ver:

$$\langle R_2^\dagger\chi|\psi\rangle = \langle\chi|R_2\psi\rangle = \langle\chi|R_1\psi\rangle = \langle R_1^\dagger\chi|\psi\rangle \qquad \forall\ \chi \in D(R_2^\dagger),\ \forall\ \psi \in D(R_1)$$

Es decir, que $R_1^\dagger\chi = R_2^\dagger\chi \;\; \forall\ \chi \in D(R_2^\dagger)$. ∎

Una vez presentadas las definiciones anteriores, se introducirán los conceptos de operador simétrico y operador cerrado.

Definición 3.3 Sea R un operador definido en un dominio $D(R) \subset \mathcal{H}$. Diremos que R es un operador *cerrado* si su grafo $G(R)$ es cerrado, siendo $G(R)$:

$$G(R) = \{(\psi, R\,\psi) \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \mid \psi \in D(R)\}$$

Definición 3.4 Sea R un operador definido en un dominio $D(R)$. Diremos que R es *simétrico* si se cumple:

$$\langle \chi | R\,\psi \rangle = \langle R\,\chi | \psi \rangle \qquad\qquad \forall\, \chi, \psi \in D(R)$$

Antes de introducir el concepto de operador autoadjunto, introduciremos otra proposición referida a operadores simétricos.

Proposición 3.2 Para todo operador simétrico R densamente definido, se tiene $R \subset R^\dagger$

Una vez dispongamos de un operador *simétrico* y *cerrado*, nos interesará ver si además es *autoadjunto* o no. Para hacer esto, será imprescindible tener bien definido lo que entenderemos por operador *autoadjunto*.

Definición 3.5 Dado un operador R, diremos que es *autoadjunto* si $R = R^\dagger$, es decir, si R es *simétrico* y además se cumple que $D(R) = D(R^\dagger)$.

Tras estas definiciones, veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1 Consideremos el siguiente operador:

$$P = -i\partial_x \qquad \text{con} \;\; D(P) = \{\psi \in AC([0,1])\, |\psi(0) = \psi(1) = 0\}$$

Veamos que P es simétrico. Por definición, tendremos:

$$\langle\, \chi \,| P\, \psi\, \rangle = -i \int_0^1 \bar{\chi}\, \partial_x\, \psi\, dx$$

Que integrando por partes, queda:

$$\langle\, \chi \,| P\, \psi\, \rangle = -i \left[\underbrace{\bar{\chi}\, \psi|_0^1}_{0} - \int_0^1 \partial_x\, \bar{\chi}\, \psi\, dx \right] = i \int_0^1 \partial_x\, \bar{\chi}\, \psi\, dx \tag{1}$$

Ahora, para ver que es simétrico, bastará con calcular $\langle P\,\chi \,|\, \psi\,\rangle$. Por definición:

$$\langle P\,\chi \,|\, \psi\,\rangle = \int_0^1 \overline{-i\,\partial_x\,\chi}\, \psi\, dx = i \int_0^1 \partial_x\, \bar{\chi}\, \psi\, dx \tag{2}$$

Como (1) = (2), queda demostrado que P es simétrico.

Veamos ahora como es $P^\dagger$. Utilizando la el producto escalar, acabamos de ver que:

$$\langle -i\partial_x \chi | \psi \rangle = \langle \chi | P\psi \rangle \qquad \forall \psi \in D(P), \chi \in AC([0,1])$$

A partir de la igualdad anterior se deduce que $D(P^\dagger) = AC([0,1])$ y $P^\dagger = -i\partial_x$. Es decir, $P \subset P^\dagger$ como debe ocurrir para cualquier operador simétrico.

En casos como en el del ejemplo anterior, nos interesará encontrar las extensiones autoadjuntas del operador (si las tiene). Para ello, se introducirán unos conceptos que serán de gran utilidad. El primero de ellos será el *espacio de condiciones de contorno*. Este pretende actuar como una extensión de las condiciones de contorno "clásicas". Primero se introducirá la estructura matemática de manera abstracta. Tras esto, se obtendrá dicho espacio para el operador del ejemplo anterior.

3.2. Espacio de condiciones de contorno

Definición 3.6 Sea R un operador simétrico con dominio D(R). Denominaremos *espacio de condiciones de contorno* al conjunto cociente dado por:

$$\mathcal{B} = D(R^\dagger)/D(R)$$

Siendo $D(R^\dagger)$ el dominio del operador adjunto.

En el siguiente ejemplo, obtendremos como es este espacio para el caso particular del operador P analizado en el ejemplo anterior.

Ejemplo 3.2 Recordemos que el operador P estaba definido como:

$$P = -i\partial_x \qquad \text{con} \;\; D(P) = \{\psi \in AC([0,1])\, |\psi(0) = \psi(1) = 0\}$$

Además, en el ejemplo anterior habíamos obtenido que:

$$D(P^\dagger) = \{\chi \in AC([0,1])\}$$

Con esto, podemos calcular como será el espacio cociente $D(P^\dagger)/D(P)$. Para que $\chi_1,\ \chi_2 \in D(P^\dagger)$ pertenezcan a la misma clase de equivalencia, se tendrá que cumplir:

$$\chi_1 - \chi_2 = \psi \qquad\qquad \text{con } \psi \in D(P)$$

Lo que se traduce en:

$$\chi_1 - \chi_2 = \psi \Rightarrow \begin{cases} \chi_1(0) - \chi_2(0) = \underbrace{\psi(0)}_{0} \quad \Rightarrow \quad \chi_1(0) = \chi_2(0) \\ \\ \chi_1(1) - \chi_2(1) = \underbrace{\psi(1)}_{0} \quad \Rightarrow \quad \chi_1(1) = \chi_2(1) \end{cases}$$

Por lo tanto las clases de equivalencia estarán determinadas por $\chi(0)$ y $\chi(1)$. De esta forma, los elementos de $\mathcal{B}$ serán:

$$[\chi] \sim (\chi(0),\ \chi(1))$$

Es decir, que $\mathcal{B} \sim \mathbb{C}^2$

Como acabamos de ver, el espacio vendrá dado por los valores de las funciones en el borde. Para otros operadores, como por ejemplo la derivada segunda, este espacio dependerá de las funciones y sus derivadas evaluadas en los bordes. Como veremos a continuación, este espacio jugará un papel relevante a la hora de encontrar las extensiones autoadjuntas. Esto no es nada nuevo. Basta con recordar, por ejemplo, la necesidad de fijar las temperaturas en los límites del sistema para resolver la ecuación del calor, los valores del potencial en los bordes al resolver la ecuación de Poisson o la resolución de la ecuación de Schrödinger para una partícula encerrada en un volumen, en la que para obtener la solución es necesario imponer condiciones sobre los valores de la función de onda y sus derivadas en el borde. En definitiva, en todo problema físico en el que entre en juego la resolución de alguna ecuación diferencial las condiciones de contorno serán las que nos permitirán resolver el problema.

Podemos definir ahora, en este *espacio de condiciones de contorno*, una forma bilineal que resultará de gran utilidad a la hora de obtener las extensiones autoadjuntas. Además, esta forma bilineal tomará un papel esencial al estudiar la traslación de simetrías clásicas a sistemas cuánticos.

3.3. Forma bilineal. Anomalía

Definición 3.7 Sea R un operador simétrico. Denominaremos *anomalía* a la forma sesquilineal definida como:

$$\mathcal{A}(\psi_1, \psi_2) = i \langle R^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle - i \langle \psi_1 | R^\dagger \psi_2 \rangle \qquad \text{con } \psi_1, \psi_2 \in D(R^\dagger)$$

Siendo $R^\dagger$ el operador adjunto de R.

En el siguiente ejemplo, se calculará la *anomalía* para el caso particular del operador P definido anteriormente.

Ejemplo 3.3 Recordemos que el operador adjunto $P^\dagger$ venía dado por:

$$P^\dagger = -i\partial_x \qquad \text{con } D(P^\dagger) = \{\psi \in AC([0,1])\}$$

Con esto, la *anomalía* será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\psi_1, \psi_2) &= i \langle R^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle - i \langle \psi_1 | R^\dagger \psi_2 \rangle \\
&= i \int_0^1 \overline{-i\, \partial_x\, \psi_1}\, \psi_2\, dx - i \int_0^1 \overline{\psi_1}\, (-i)\, \partial_x\, \psi_2\, dx \\
&= -\int_0^1 \partial_x\, \overline{\psi_1}\, \psi_2\, dx - \int_0^1 \overline{\psi_1}\, \partial_x\, \psi_2\, dx \\
&= -\int_0^1 \partial_x\, \overline{\psi_1}\, \psi_2\, dx - \left[\overline{\psi_1}\, \psi_2 |_0^1 - \int_0^1 \partial_x\, \overline{\psi_1}\, \psi_2\, dx \right]
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\mathcal{A}(\psi_1, \psi_2) = \overline{\psi_1(0)}\, \psi_2(0) - \overline{\psi_1(1)}\, \psi_2(1) \tag{3}$$

La razón por la cual esta forma bilineal es importante a la hora de obtener extensiones autoadjuntas se plasma en la siguiente proposición.

Proposición 3.3 Sea R un operador simétrico con dominio $D(R)$. Si $\tilde{R}$ es una extensión de R, entonces se cumple:

$$D(\tilde{R}^{\dagger}) = D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}} \tag{4}$$

Siendo $D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}}$ el conjunto ortogonal a $D(\tilde{R})$ por $\mathcal{A}$.

Veamos la demostración de esta proposición.

Demostración. Queremos probar que $D(\tilde{R}^{\dagger}) = D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}}$, o lo que es lo mismo:

$$\chi \in D(\tilde{R}^{\dagger}) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}(\chi, \psi) = 0 \qquad \forall \psi \in D(\tilde{R})$$

Para ello será necesario tener presente que, debido a las proposiciones presentadas anteriormente, si $\tilde{R}$ es una extensión de R tenemos:

$$R \subset \tilde{R} \subset \tilde{R}^{\dagger} \subset R^{\dagger}$$

Probemos primero que $\chi \in D(\tilde{R}^{\dagger}) \;\Rightarrow\; \chi \in D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}}$. Por definición:

$$\chi \in D(\tilde{R}^{\dagger}) \;\Rightarrow\; \langle \chi | \tilde{R}\ \cdot \rangle \text{ acotado en } D(\tilde{R}) \;\Rightarrow\; \langle \chi | \tilde{R}\ \cdot \rangle = \langle \tilde{R}^{\dagger}\ \chi | \cdot \rangle \text{ en } D(\tilde{R})$$

Ahora, como $R^{\dagger}$ es extensión tanto de $\tilde{R}$ como de $\tilde{R}^{\dagger}$:

$$\langle \chi | \tilde{R}\ \cdot \rangle = \langle \tilde{R}^{\dagger}\ \chi | \cdot \rangle \text{ en } D(\tilde{R}) \;\Rightarrow\; \langle \chi | R^{\dagger}\ \cdot \rangle - \langle R^{\dagger}\ \chi | \cdot \rangle = 0 \text{ en } D(\tilde{R})$$

Pero esto significa que:

$$\langle \chi | R^{\dagger}\ \cdot \rangle - \langle R^{\dagger}\ \chi | \cdot \rangle = 0 \text{ en } D(\tilde{R}) \;\Rightarrow\; \langle \chi | R^{\dagger}\ \psi \rangle - \langle R^{\dagger}\ \chi | \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in D(\tilde{R}) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \chi \in D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}}$$

Hemos probado entonces que $\chi \in D(\tilde{R}^{\dagger}) \;\Rightarrow\; \chi \in D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}}$.

Veamos ahora la implicación en sentido inverso, es decir, $\chi \in D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}} \;\Rightarrow\; \chi \in D(\tilde{R}^{\dagger})$. Para ello no haremos más que recorrer la demostración en sentido inverso:

$$\chi \in D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}} \;\Rightarrow\; \langle \chi | R^\dagger\ \psi\rangle - \langle R^\dagger\ \chi|\psi\rangle = 0 \quad \forall \psi \in D(\tilde{R}) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \langle \chi | R^\dagger\ \cdot\rangle - \langle R^\dagger\ \chi|\cdot\rangle = 0 \text{ en } D(\tilde{R})$$

Aplicando que $\tilde{R} \subset R^\dagger$:

$$\langle \chi | R^\dagger\ \cdot\rangle - \langle R^\dagger\ \chi|\cdot\rangle = 0 \text{ en } D(\tilde{R}) \;\Rightarrow\; \langle \chi|\tilde{R}\ \cdot\rangle = \langle R^\dagger \chi|\cdot\rangle \text{ en } D(\tilde{R}) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \langle \chi|\tilde{R}\ \cdot\rangle \text{ acotado en } D(\tilde{R}) \;\Rightarrow\; \chi \in D(\tilde{R}^\dagger)$$

Es decir, acabamos de ver que efectivamente $\chi \in D(\tilde{R})^{\perp\mathcal{A}} \;\Rightarrow\; \chi \in D(\tilde{R}^\dagger)$.

■

Veamos la aplicación de la proposición anterior en un caso concreto.

Ejemplo 3.4 Consideremos la siguiente extensión del operador P definido anteriormente:

$$\tilde{P} = -i\partial_x \quad \text{con} \quad D(\tilde{P}) = \{\psi \in AC([0,1]) \mid \psi(0) = 0\}$$

Para obtener ahora el dominio del adjunto utilizaremos la proposición anterior, es decir que $D(\tilde{P}^\dagger) = D(\tilde{P})^{\perp\mathcal{A}}$. Teniendo en cuenta la expresión 3:

$$\mathcal{A}(\chi,\psi) = \underbrace{\overline{\chi(0)}\psi(0)}_{0} - \overline{\chi(1)}\psi(1) = 0 \qquad \forall \chi \in D(\tilde{P}^\dagger), \psi \in D(\tilde{P})$$

De esta forma, considerando que la *anomalía* tiene que ser cero para todo $\psi \in D(\tilde{P})$ y que $\tilde{P}^\dagger \subset P^\dagger$, $\tilde{P}^\dagger$ será:

$$\tilde{P}^\dagger = -i\partial_x \quad \text{con} \quad D(\tilde{P}^\dagger) = \{\chi \in AC([0,1]) \mid \chi(1) = 0\}$$

Acabamos de ver en el ejemplo anterior que una vez conocidos un operador y su adjunto, podemos caracterizar fácilmente cualquiera de sus extensiones sin más que utilizar la *anomalía*.

A estas alturas del desarrollo, ya disponemos de las herramientas necesarias para encontrar las extensiones autoadjuntas de cualquier operador. Para terminar con el operador P tratado a lo largo de todos los ejemplos, obtengamos sus extensiones autoadjuntas.

Ejemplo 3.5 Obtener las extensiones autoadjuntas del operador P definido como:

$$P = -i\partial_x \qquad \text{con } D(P) = \{\psi \in AC([0,1]) \mid \psi(0) = \psi(1) = 0\}$$

Recordemos que su adjunto venía dado por:

$$P^\dagger = -i\partial_x \qquad \text{con } D(P^\dagger) = \{\chi \in AC([0,1])\}$$

Y la anomalía:

$$\mathcal{A}(\psi_1, \psi_2) = -\overline{\psi_1}\,\psi_2|_0^1$$

Con todo esto en mente planteemos la siguiente extensión de P:

$$\tilde{P} = -i\partial_x \qquad \text{con } D(\tilde{P}) = \{\psi \in AC([0,1]) \mid \alpha\psi(0) + \beta\psi(1) = 0\} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

El dominio de $\tilde{P}$ se puede reescribir como:

$$D(\tilde{P}) = \{\psi \in AC([0,1]) \mid \psi(1) = -\frac{\alpha}{\beta}\psi(0)\}$$

Como queremos que $\tilde{P}$ sea autoadjunto, tendrá que ser simétrico y además cumplirse que $D(\tilde{P}^\dagger) = D(\tilde{P})$. Dicho lo cual, lo único que nos queda es determinar α y β. Para ello, haremos uso de la expresión 4 demostrada anteriormente. Calculemos pues $D(\tilde{P})^{\perp\mathcal{A}}$:

$$\mathcal{A}(\chi, \psi) = \overline{\chi(0)}\psi(0) - \overline{\chi(1)}\psi(1) = \overline{\chi(0)}\psi(0) - \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\frac{\alpha}{\beta}\overline{\chi(0)}\psi(0) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = 0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = 1$$

Es decir, acabamos de obtener que $\alpha/\beta \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1. Ahora, como $-\alpha/\beta$ sigue teniendo módulo 1, podemos tomar:

$$-\frac{\alpha}{\beta} = e^{-i\gamma} \qquad \text{con } \gamma \in [0, 2\pi) \in \mathbb{R}$$

Finalmente, las extensiones autoadjuntas de P vendrán dadas por:

$$\tilde{P} = -i\partial_x \qquad \text{con } D(\tilde{P}) = \{\psi \in AC([0,1]) \mid \psi(1) = e^{-i\gamma}\psi(0)\} \qquad \text{con } \gamma \in [0, 2\pi) \in \mathbb{R}$$

Mencionar además que, todas las extensiones dadas por los diferentes valores de γ proporcionarán una evolución unitaria de la función de onda.

3.4. Extensión a espacio l^2

Visto el ejemplo anterior, donde $\mathcal{H} = L^2$, resulta interesante ejemplificar como se procedería en el caso de que $\mathcal{H} = l^2$. Para verlo, procederemos con el mismo tratamiento realizado sobre el operador $P = -i\,\partial_x$ en el ejemplo anterior. Comenzaremos obteniendo el operador adjunto, tras lo cual se obtendrá el espacio de condiciones de contorno, se calculará la anomalía y se obtendrán las extensiones autoadjuntas.

Ejemplo 3.6 Consideremos el siguiente operador:

$$P\,(e_n - e_o) = ne_n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \qquad\qquad D(P) = \{v \in l^2_{AC} | \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n = 0\}$$

Siendo $l^2_{AC} = \{\, v \in l^2 \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} nv_n e_n \in l^2\}$

Ver que P es simétrico y obtener el operador adjunto $P^\dagger$ asociado.

Para ver que el operador es simétrico basta con calcular el producto escalar entre v y w con $v, w \in D(P)$:

$$\langle w|Pv\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{w_n}\, n\, v_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{n\, w_n}\, v_n = \langle Pw|v\rangle$$

Acabamos de ver que P es simétrico. Obtengamos ahora $P^\dagger$. Para ello, recordemos que w pertenecerá a $P^\dagger$ si:

$$\langle w|Pv\rangle = \langle z|v\rangle \quad \text{con } z \in l^2 \tag{5}$$

A partir de (5) es inmediato ver que $l^2_{AC} \subset D(P^\dagger)$. Si recordamos que $\langle w|Pv\rangle$ debe ser acotado, denominando $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{n} e_n$ tenemos:

$$\langle f|Pv\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n} nv_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n - v_0 = -v_0 \qquad\qquad \text{con } v \in D(P) \tag{6}$$

Tenemos pues un funcional lineal acotado y por lo tanto $f \in D(P^\dagger)$.

Teniendo esto en cuenta, el dominio del operador adjunto $D(P^\dagger)$ vendrá dado por:

$$D(P^\dagger) = D(P) \oplus \langle e_0, f\rangle$$

Donde $\langle e_0, f\rangle$ es la envolvente lineal de e_0 y f.

Por otra parte, la actuación de $P^\dagger$ sobre los elementos de su domino viene dada por:

$$P^\dagger v = Pv \qquad P^\dagger e_0 = 0 \qquad P^\dagger f = -e_0 \qquad \text{con } v \in D(P) \tag{7}$$

A partir del ejemplo anterior se infiere que el operador P no es autoadjunto, pues $D(P) \neq D(P^\dagger)$. Por consiguiente, estaremos interesados en obtener las extensiones autoadjuntas. Para ello, debemos obtener previamente el espacio de condiciones de contorno y la expresión de la anomalía. Veamos primero la obtención del espacio de condiciones de contorno.

Ejemplo 3.7 Obtener el espacio de condiciones de contorno para el operador P definido como:

$$P\left(e_n - e_0\right) = ne_n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \qquad D(P) = \{v \in l^2_{AC} | \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n = 0\}$$

Sean $w, w' \in D(P^\dagger)$. Estos vendrán dados por:

$$w = w^1 + \lambda f + \mu e_0 \qquad w' = w'^1 + \lambda' f + \mu' e_0 \qquad \text{con } \ w^1, w'^1 \in D(P)$$

Para obtener $\mathcal{B}$ conviene recordar que dicho espacio viene dado por el conjunto cociente $D(P^\dagger)/D(P)$. Esto implica que $w - w' \in D(P)$ con $w, w' \in D(P^\dagger)$. La resta de ambos elementos será:

$$w - w' = w^1 - w'^1 + (\lambda - \lambda')f + (\mu - \mu')e_0$$

Es decir, se debe cumplir que $(\lambda - \lambda')f + (\mu - \mu')e_0 = 0$ y esto solo es posible cuando $\lambda = \lambda'$ y $\mu = \mu'$.

Dicho lo cual, el espacio de condiciones de contorno $\mathcal{B}$ vendrá dado:

$$[w] \sim (\ \lambda, \mu\ )$$

En otras palabras, los elementos de $\mathcal{B}$ estarán generados por e_0 y f.

Tras la obtención del espacio de condiciones de contorno, pasaremos a calcular la anomalía. Conviene comentar aquí que por lo obtenido en el ejemplo anterior, la anomalía presentará la siguiente dependencia:

$$\mathcal{A}(w, w') = \mathcal{A}(\lambda f + \mu e_0, \lambda' f + \mu' e_0) \qquad\qquad \text{con } w, w' \in D(P^\dagger)$$

Dicho esto y recordando que la acción de $P^\dagger$ viene dada por (7), prosigamos con el cálculo de la anomalía.

Ejemplo 3.8 Obtener la expresión de la anomalía para el operador P definido:

$$P\,(e_n - e_0) = ne_n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \qquad\qquad D(P) = \{v \in l^2_{AC} | \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n = 0\}$$

Sean w, w' dos elementos pertenecientes al dominio de $P^\dagger$, entonces la anomalía $\mathcal{A}(w, w')$ será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(w, w') &= i\,\langle P^\dagger w | w' \rangle - i\,\langle w | P^\dagger w' \rangle \\
&= \langle Pw^1 - \lambda e_0 | w'^1 + \lambda' f + \mu' e_0 \rangle - \langle w^1 + \lambda f + \mu e_0 | Pw'^1 - \lambda' e_0 \rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{nw^1_n} w'^1_n + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \lambda' \overline{w^1_n} - \overline{\lambda} w'^1_0 - \overline{\lambda}\mu' - \\
&\quad - \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{w^1_n} n w'^1_n + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \overline{\lambda} w'^1_n - \lambda' \overline{w^1_0} - \overline{\mu}\lambda' \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \lambda' \overline{w^1_n} + \lambda' \overline{w^1_0} - \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \overline{\lambda} w'^1_n + \overline{\lambda} w'^1_0 \right) + \overline{\mu}\lambda' - \overline{\lambda}\mu' \\
&= \overline{\mu}\lambda' - \overline{\lambda}\mu'
\end{aligned}$$

Tras la obtención de la anomalía, podemos a calcular las extensiones autoadjuntas del operador P tratado en los ejemplos anteriores. Para ello conviene recordar que buscamos que $D(P) = D(P^\dagger)$ y que haremos uso de la expresión (4). Dicho esto, calculemos las extensiones autoadjuntas del operador P.

Ejemplo 3.9 Obtener las extensiones autoadjuntas del operador P definido:

$$P\,(e_n - e_0) = ne_n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \qquad\qquad D(P) = \{v \in l^2_{AC} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n = 0\}$$

Para empezar tomaremos que las extensiones de P vendrán dadas por:

$$D(\tilde{P}) = \{w = v + \lambda f + \mu e_0 \,|\, v \in D(P)\ ,\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0\} \qquad \text{con } \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Teniendo en cuenta ahora que $\mathcal{A}(w, v) = 0$ para todo $v \in D(\tilde{P})$, $w \in D(\tilde{P^\dagger})$, utilicemos la anomalía calculada en el ejemplo anterior para obtener las extensiones autoadjuntas. Sean $w \in D(\tilde{P})$, $w' \in D(\tilde{P}^\dagger)$ entonces:

$$\mathcal{A}(w', w) = \lambda\overline{\mu'} - \overline{\lambda'}\mu = \lambda\overline{\mu'} - \overline{\lambda'}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\lambda\right) = \lambda\left(\overline{\mu'} + \frac{\beta}{\alpha}\overline{\lambda'}\right)$$

Si imponemos que $D(\tilde{P}) = D(\tilde{P}^\dagger)$ y recordamos que debe cumplirse (4):

$$\mathcal{A}(w', w) = 0 \Rightarrow \overline{\mu'} + \frac{\beta}{\alpha}\overline{\lambda'} = \overline{\lambda'}\left(-\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$$

Es decir, las extensiones autoadjuntas vendrán dadas por:

$$D(\tilde{P}) = \{w = v + \lambda f + \mu e_0 \ |\, v \in D(P)\ ,\ \mu = -\gamma\lambda\} \qquad \text{con } \gamma \in \mathbb{R}$$

Mencionar que el resultado obtenido en este último ejemplo tiene cierta relación con el obtenido en el ejemplo de la sección anterior. Para obtenerla basta con tomar como base ortonormal en $L^2[0, 1]$ la siguiente:

$$e_n = \frac{1}{2\pi}e^{2\pi i n x}$$

Si ahora tenemos en cuenta que:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n} = ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad \text{para } |x| \leq 1,\ x \neq 1$$

Entonces es inmediato ver que $f = 2\pi i(\frac{1}{2} - x)$. Con esto, la función $\psi = f + re_o$ satisface que:

$$\psi(1) = \frac{r - i\pi}{r + i\pi}\psi(0)$$

Es decir, recuperamos las condiciones de contorno pseudoperiódicas obtenidas en la sección anterior.

A continuación, se estudiará un nuevo operador Q definido a partir de un operador autoadjunto. Dicho operador resultará ser una generalización del operador P tratado en los ejemplos anteriores. Veamos como está definido.

Sea Q_0 un operador autoadjunto densamente definido sobre su dominio $D(Q_0)$. Entonces podemos definir el operador Q como la restricción de Q_0 al dominio:

$$D(Q) = \{v \in D(Q_0) \mid \langle f|Q_0 v\rangle + \langle g|v\rangle = 0\} \qquad \text{con} \;\; f \notin D(Q_0),\; g \in l^2 \tag{8}$$

Mencionar en este punto que, como se ha mencionado anteriormente, el operador Q no es mas que una generalización del operador P de los ejemplos anteriores. De hecho, si tomamos para f y g:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{n} e_n \qquad g = e_0 \tag{9}$$

E introducimos en la relación que aparece en $D(Q)$ (sustituyendo Q por P), tenemos:

$$\langle f|Pv\rangle + \langle g|v\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} v_n + v_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n = 0$$

Es decir, la misma relación que aparecía en $D(P)$.

Pasaremos ahora a estudiar el operador Q. Empezaremos por ver que forma tiene su adjunto, $Q^\dagger$.

Ejemplo 3.10 Dado el operador Q definido como la restricción del operador autoadjunto Q_0 al dominio:

$$D(Q) = \{v \in D(Q_0) \mid \langle f|Q_0 v\rangle + \langle g|v\rangle = 0\}$$

Obtener su operador adjunto $Q^\dagger$.

Aplicando la defínción de operador adjunto, obtenemos a partir de $D(Q)$ que:

$$\langle f|Qv\rangle = \langle -g|v\rangle$$

Lo que implica que $f \in D(Q^\dagger)$ con $Q^\dagger f = -g$.

Además, si consideramos un $w \in D(Q_0)$ tenemos:

$$\langle w|Qv\rangle = \langle w|Q_0 v\rangle = \langle Q_0 w|v\rangle$$

Es decir, que $w \in D(Q^\dagger)$ con $Q^\dagger w = Q_0 w$.

Dicho todo esto, el dominio del operador $Q^\dagger$ vendrá dado por:

$$D(Q^\dagger) = D(Q_0) \oplus \langle f\rangle$$

Quedando la actuación de $Q^\dagger$ sobre los elementos de su dominio de la siguiente forma:

$$Q^\dagger w = Q_0 w \qquad Q^\dagger f = -g \qquad \text{con } \ w \in D(Q_0) \tag{10}$$

Como acabamos de ver en el ejemplo anterior, $D(Q) \neq D(Q^\dagger)$. En otras palabras, el operador Q no es autoadjunto. Para encontrar las extensiones autoadjuntas de Q, procederemos como con los dos operadores tratados anteriormente. Primero, obtendremos el espacio de condiciones de contorno. Tras esto, calcularemos la anomalía. Por último, obtendremos las extensiones autoadjuntas haciendo uso de la anomalía así como de la expresión (4). Dicho esto, prosigamos con el estudio de Q.

En el siguiente ejemplo se obtendrá el espacio de condiciones de contorno de Q.

Ejemplo 3.11 Sea Q el operador definido como la restricción del operador autoadjunto Q_0 al dominio:

$$D(Q) = \{v \in D(Q_0) \mid \langle f|Q_0 v\rangle + \langle g|v\rangle = 0\}$$

Obtener el espacio de condiciones de contorno correspondiente.

En el ejemplo anterior obtuvimos que el dominio del operador adjunto $Q^\dagger$ venía dado por:

$$D(Q^\dagger) = D(Q_0) \oplus \langle f\rangle$$

Para obtener el espacio de condiciones de contorno, conviene reexperesarlo en función de $D(Q)$. Si tomamos un $h \in D(Q_0)$ tal que:

$$\langle f|Q_0 h\rangle + \langle g|h\rangle = 1$$

De forma podemos expresar el domino de Q_0 como:

$$D(Q_0) = D(Q) \oplus \langle h\rangle$$

Y por lo tanto, el dominio de $Q^\dagger$ será:

$$D(Q^\dagger) = D(Q_0) \oplus \langle f\rangle = D(Q) \oplus \langle h, f\rangle$$

Es decir, nos encontramos en una situación análoga a la vista en el ejemplo (7).

Teniendo esto presente, podemos escribir $w, w' \in D(Q^\dagger)$ como:

$$w = w^1 + \lambda f + \mu h \qquad w' = w'^1 + \lambda' f + \mu' h \qquad \text{con } \ w^1, w'^1 \in D(Q_0)$$

Y que las clases de equivalencia se obtiene a partir de la relación $w - w' \in D(Q)$, el espacio de condiciones de contorno $\mathcal{B}$ vendrá dado por:

$$[w] \sim (\ \lambda, \mu\ )$$

O dicho de otra forma, los elementos de $\mathcal{B}$ estarán generados por f y h.

Destacar que el espacio de condiciones de contorno obtenido contiene el correspondiente al operador P tratado anteriormente. Para recuperarlo bastaría con sustituir f y g por los mencionados en (9). Igual que ocurría en los casos anteriores, la anomalía dependerá de dos elementos del espacio de condiciones de contorno. Para el operador Q en particular, tenemos:

$$\mathcal{A}(w, w') = \mathcal{A}(\lambda f + \mu h, \lambda' f + \mu' h) \qquad \text{con } w, w' \in D(Q^\dagger)$$

Calculémosla explícitamente.

Ejemplo 3.12 Dado el operador Q definido como la restricción del operador autoadjunto Q_0 al dominio:

$$D(Q) = \{v \in D(Q_0) \mid \langle f|Q_0 v\rangle + \langle g|v\rangle = 0\}$$

Obtener la expresión de la anomalía.

Teniendo en cuenta las propiedades de $Q^\dagger$ mencionadas anteriormente y dados $w, w' \in D(Q^\dagger)$, $\mathcal{A}$ será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(w, w') &= \mathcal{A}(\lambda f + \mu h, \lambda' f + \mu' h) \\
&= \langle -\lambda g + \mu Q_0 h|\lambda' f + \mu' h\rangle - \langle \lambda f + \mu h| - \lambda' g + \mu' Q_0 h\rangle \\
&= \overline{\lambda}\lambda' (\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle) + \overline{\mu}\mu' \underbrace{(\langle Q_0 h|h\rangle - \langle h|Q_0 h\rangle)}_{0} - \\
&- \overline{\lambda}\mu' \underbrace{(\langle g|h\rangle - \langle f|Q_0 h\rangle)}_{1} + \overline{\mu}\lambda' \underbrace{(\langle h|g\rangle - \langle Q_0 h|f\rangle)}_{1} \\
&= \overline{\lambda}\lambda' (\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle) + \overline{\mu}\lambda' - \overline{\lambda}\mu'
\end{aligned}$$

Una vez obtenida la anomalía, estamos en disposición de calcular las extensiones autoadjuntas de Q. Dicha obtención se llevará a cabo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.13 Dado el operador Q definido como la restricción del operador autoadjunto Q_0 al dominio:

$$D(Q) = \{v \in D(Q_0) \mid \langle f|Q_0 v\rangle + \langle g|v\rangle = 0\}$$

Obtener las extensiones autoadjuntas.

En primer lugar, consideraremos que las extensiones autoadjuntas de Q son de la forma:

$$D(\tilde{Q}) = \{w = v + \lambda f + \mu h \mid v \in D(Q),\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0\} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Si ahora calculamos la anomalía $\mathcal{A}(w', w)$ siendo $w \in D(\tilde{Q})$ y $w' \in D(Q^\dagger)$ e imponiendo que $D(\tilde{Q}) = D(Q^\dagger)$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(w',w) &= \overline{\lambda}\lambda' \left(\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle\right) + \overline{\mu}\lambda' - \overline{\lambda}\mu' \\
&= \overline{\lambda}\lambda' \left(\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle\right) + \frac{\alpha}{\beta}\overline{\lambda}\lambda' - \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\overline{\lambda}\lambda' \\
&= \overline{\lambda}\lambda' \left(\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\right)
\end{aligned}
$$

Y sin más que imponer que debe cumplirse (4), obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(w',w) = 0 &\Rightarrow \langle f|g\rangle + \frac{\alpha}{\beta} = \overline{\langle f|g\rangle + \frac{\alpha}{\beta}} \\
&\Rightarrow \langle f|g\rangle + \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las extensiones autoadjuntas de Q vendrán dadas por:

$$
D(\tilde{Q}) = \{w = v + \lambda f + \mu h \mid v \in D(Q),\ \mu = (\langle f|g\rangle - \gamma)\lambda\} \qquad \text{con } \gamma \in \mathbb{R}
$$

4. Resultados

A continuación, se recogerá el prodecimiento utilizado a lo largo del trabajo en la obtención de las extensiones autoadjuntas.

Dado un operador simétrico R densamente definido sobre su dominio $D(R)$, para obtener sus extensiones autoadjuntas debemos:

1.- Obtener el dominio de su operador adjunto $R^\dagger$, así como la actuación del mismo sobre cada elemento de su dominio.

2.- Encontrar el espacio de condiciones de contorno $\mathcal{B} = D(R^\dagger)/D(R)$.

3.- Calcular la anomalía teniendo en cuenta que dependerá exclusivamente de los elementos de $\mathcal{B}$.

4.- Obtener las extensiones autoadjuntas de R utilizando la anomalía, imponiendo que el dominio de $\tilde{R}$ debe ser igual que el dominio de $\tilde{R}^\dagger$ y que $D(\tilde{R}^\dagger) = D(\tilde{R})^{\perp_\mathcal{A}}$.

Siguiendo estos cuatro pasos seremos capaces, con mayor o menor dificultad, de encontrar las extensiones autoadjuntas de cualquier operador simétrico densamente definido.

5. Conclusión

Tras lo visto a lo largo del trabajo, podemos concluir que se han cumplido los objetivos propuestos al comienzo del mismo.

Destacar que el procedimiento obtenido, tal y como se ha evidenciado, precisa solamente de dos elementos conceptualmente sencillos para ser utilizado.

En primer lugar, el espacio de condiciones de contorno que, además de facilitar el cálculo de la anomalía, resulta indispensable en el momento de obtener las extensiones autoadjuntas (punto 2, 3 y 4 de la sección anterior). Y en segundo lugar, la anomalía mediante la cual somos capaces de determinar que relación debe haber entre las condiciones de contorno para que las extensiones sean autoadjuntas.

El hecho de que solamente se utilicen estos dos elementos constata que el procedimiento es sencillo y eficaz, quedando patente en los ejemplos tratados a lo largo del desarrollo del trabajo.

Para finalizar, comentar que resultaría interesante revisar el papel que jugarían los dos elementos presentados en el trabajo en el estudio de quenchs cuánticos, así como analizar como afectarían a las extensiones autoadjutnas.

Referencias

[1] M. Reed y B. Simon (1980). *Methods of modern mathematical physics (Vol.1)*, San Diego, California: Academic press, INC.

[2] J. G. Esteve, Phys. Rev. D **66**, 125013 (2002).

[3] J. G. Esteve, Fernando Falceto y C. García Canal. Phys. Lett. A **374**, 819 (2010).

[4] J. G. Esteve, F. Falceto y Pulak Ranjan Giri. Phys. Rev. A **85**, 022104 (2012).

[5] M. Reed y B. Simon (1975). *Methods of modern mathematical physics (Vol.2)*, San Diego, California: Academic press, INC.

[6] Fernando Falceto (2018). *Anomalous Heisenberg equation and related issues.*

[7] J. G. Esteve *Mecánica Cuántica*. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España. Curso 2018 - 2019.

[8] C. Ruiz, *Caracterización de cerrados y compactos por sucesiones.* Madrid, España. Recuperado de: http://www.mat.ucm.es/ cruizb/MMI/Apuntes-i/Apuntes-16/Ap-Sucesiones-5.pdf (2019)

[9] M. Palacios, *Formas bilineales y cuadráticas.* Zaragoza, España. Recuperado de: http://pcmap.unizar.es/~mpala/A_L_lecci/11fcuadr.pdf (2019)

Anexo

A. Recordatorio de conceptos importantes

En caso de ser necesario, conviene revisar algunos conceptos básicos que se utilizan a lo largo del trabajo. Dichos conceptos se recogen a continuación:

A.1. Función absolutamente continua

Definición A.1 Sea I un intervalo de la recta real $\mathbb{R}$, y sea $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Una función $f : I \to K$ se denomina *absolutamente continua* si $f \in L^2(I)$ verificándose además que $\partial_x f \in L^2(I)$. Al conjunto de todas las funciones absolutamente continuas sobre I lo denotaremos como $AC(I)$. Este vendrá dado por:

$$AC(I) = \left\{ f \in L^2(I) \mid \partial_x f \in L^2(I) \right\}$$

A.2. Conjunto cerrado, clausura y conjunto denso

Definición A.2 Un conjunto X es *cerrado* si y solo si para toda sucesión convergente de elementos de X, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, con $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, se tiene que $x \in X$.

Definición A.3 Sea X un conjunto. Denominaremos *clausura* de X, $\overline{X}$, al mínimo conjunto cerrado que contiene a X.

Definición A.4 Un conjunto X será *denso* si y solo si su clausura es igual al conjunto total.

A.3. Conjunto cociente

Definición A.5 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea S un subespacio vectorial de V. Podemos definir la siguiente relación de equivalencia entre los elementos de V:

Dados v_1, $v_2 \in V$, diremos que están relacionados si $v_1 - v_2 \in S$.

Llamaremos *espacio cociente* al conjunto de clases de equivalencia derivadas de la relación anterior. Dicho conjunto lo denotaremos V/S.

A.4. Forma sesquilineal

Definición A.6 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Se denomina *forma sesquilineal* sobre V a toda aplicación $F : V \times V \longrightarrow K$ cumpliendo las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
i)\ \forall\, u_1, u_2, v \in V, &\quad F(u_1 + u_2, v) = F(u_1, v) + F(u_2, v) \\
ii)\ \forall\, u_1, u_2, v \in V, &\quad F(v, u_1 + u_2) = F(v, u_1) + F(v, u_2) \\
iii)\ \forall\, u, v \in V, &\quad \forall\, \lambda \in K, \quad F(\lambda u, v) = \bar{\lambda} F(u, v) \\
iiii)\ \forall\, u, v \in V, &\quad \forall\, \lambda \in K, \quad F(u, \lambda v) = \lambda F(u, v)
\end{aligned}$$

B. Resolución de ecuaciones

B.1. $i\hbar\partial_t\psi(x,t) = -i\partial_x\psi(x,t)$

Antes de resolver la ecuación, tomaremos $\hbar = 1$. Esto relajará la notación y facilitará la resolución. Dicho esto, la ecuación a resolver será:

$$\partial_t\psi(x,t) + \partial_x\psi(x,t) = 0 \tag{11}$$

Conviene introducir las funciones $\alpha(x,t)$ y $\beta(x,t)$, pues serán de gran utilidad:

$$\alpha(x,t) = x + t \qquad\qquad \beta(x,t) = x - t$$

Veamos como expresar (11) en función de α y β. Para ello, calculemos las derivadas de $\psi(\alpha,\beta)$ con respecto a t y x:

$$\begin{aligned}
\partial_t\psi(\alpha,\beta) &= \partial_\alpha\psi(\alpha,\beta)\cdot\partial_t\alpha(x,t) + \partial_\beta\psi(\alpha,\beta)\cdot\partial_t\beta(x,t) \\
&= \partial_\alpha\psi(\alpha,\beta) - \partial_\beta\psi(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x\psi(\alpha,\beta) &= \partial_\alpha\psi(\alpha,\beta)\cdot\partial_x\alpha(x,t) + \partial_\beta\psi(\alpha,\beta)\cdot\partial_x\beta(x,t) \\
&= \partial_\alpha\psi(\alpha,\beta) + \partial_\beta\psi(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

A partir de las relaciones anteriores podemos escribir (11):

$$\partial_\alpha\psi(\alpha,\beta) - \partial_\beta\psi(\alpha,\beta) + \partial_\alpha\psi(\alpha,\beta) + \partial_\beta\psi(\alpha,\beta) = 2\partial_\alpha\psi(\alpha,\beta) = 0$$

Lo que significa que la función de onda no depende de α, es decir, $\psi(\alpha,\beta) = \psi(\beta)$. Si ahora deshacemos el cambio, nos encontramos con que:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{t})$$